

Méthode Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la propagation d'ondes électromagnétiques en régime harmonique

MOHAMED EL BOUAJAJI

Equipe-projet NACHOS,
INRIA SOPHIA ANTIPOLIS-MÉDITERRANÉE

Réunion avancement projet ANR MAXWELL
Mardi 25 novembre 2008

- Projet ANR MAXWELL : système complet pour l'imagerie micro-onde des sols et des massifs rocheux.
- Contribution NACHOS : modélisation numérique de la propagation des ondes électromagnétique.
 - Equations de Maxwell en regime harmonique
 - Méthode de type Galerkin discontinu
 - Algorithmes de résolution par décomposition de domaine

Objectifs : méthodologie numérique précise et performante :

- Formulation → minimisation de l'occupation mémoire :
 - Galerkin Discontinu (GD) en simplexe → hp-adaptatives
- Algorithmes de résolution parallèles par décomposition de domaine.
- Adaptation de la méthodologie numérique au contexte applicatif du projet
- Lien avec le système d'inversion mis au point pour l'imagerie micro-onde

- ① Contexte, objectifs de l'étude
- ② Modèle et méthode de type Galerkin discontinu
- ③ Résultats numériques
- ④ Perspectives

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Equations de Maxwell en régime temporel

- Equations de Maxwell :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{J}, & (\text{loi d'Ampère}) \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) = 0, & (\text{loi de Faraday}) \end{cases}$$

avec :

- Domaine : Ω ouvert de \mathbb{R}^d , borné, $d = 2, 3$
 - \mathbf{E} et \mathbf{H} : $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ (inconnues)
 - ε et μ : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ (données)
-
- Conditions aux limites sur $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma^a \cup \Gamma^m$:
 - sur Γ^m : $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$
 - sur Γ^a : $\mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}) + z\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc})) = 0$
avec :
 - \mathbf{n} normale sortante à Γ , $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$
 - \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} champs incidents (données)

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

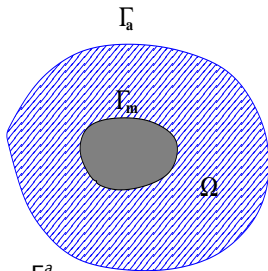
Equations de Maxwell en régime harmonique

- Dépendance harmonique en fonction du temps t même pulsation $\omega = 2\pi f$

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t). \end{cases}$$

- Maxwell harmonique :

$$\begin{cases} i\omega\varepsilon\bar{\mathbf{E}} - \text{rot}(\bar{\mathbf{H}}) = -\bar{\mathbf{J}}, \\ i\omega\mu\bar{\mathbf{H}} + \text{rot}(\bar{\mathbf{E}}) = 0, \\ n \times \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^m \\ n \times (\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}}^{inc}) + zn \times (n \times (\bar{\mathbf{H}} - \bar{\mathbf{H}}^{inc})) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^a \end{cases}$$



Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Equations de Maxwell en régime harmonique 2D

- Mode transverse magnétique : $\bar{\mathbf{H}} = {}^t(\bar{H}_x, \bar{H}_y, 0)$, $\bar{\mathbf{E}} = {}^t(0, 0, \bar{E}_z)$

$$\begin{cases} i\omega\mu\bar{H}_x + \frac{\partial\bar{E}_z}{\partial y} = 0 \\ i\omega\mu\bar{H}_y - \frac{\partial\bar{E}_z}{\partial x} = 0 \\ i\omega\varepsilon\bar{E}_z - \frac{\partial\bar{H}_y}{\partial x} + \frac{\partial\bar{H}_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow i\omega Q\mathbf{W} + \nabla \cdot F(\mathbf{W}) = 0$$

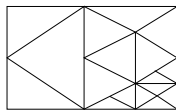
avec :

$$Q = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad F_1(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W} \equiv A_1\mathbf{W}$$

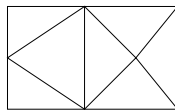
$$W = (\bar{H}_x, \bar{H}_y, \bar{E}_z) \quad F_2(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W} \equiv A_2\mathbf{W}$$

$$F(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{W}) \\ F_2(\mathbf{W}) \end{pmatrix}$$

- Avantages des méthodes GD :
 - Traiter des géométries complexes \neq différences finis
 - Possibilité d'utiliser des maillages non-conformes \neq éléments finis



Maillage non-conforme



Maillage conforme

- Facilement parallélisable
- *hp*-adaptivité

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Discrétisation par une méthode GD

- Discrétisation de Ω en N triangles τ_i :

$$- \bar{\Omega}_h = \mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^N \bar{\tau}_i, \quad a_{ij} = \tau_i \cap \tau_j$$

$$- V_h = \{ \mathbf{W} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{W}|_{\tau_i} \in \mathcal{P}^{m_i}(\tau_i)^3, \forall \tau_i \in \mathcal{T}_h \}$$

$$- \mathcal{P}^{m_i}(\tau_i) = \{ \text{polynôme sur } \tau_i \text{ de } \deg \leq m_i \}$$

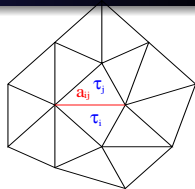
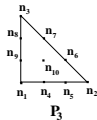
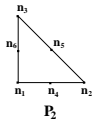
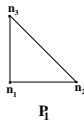
$$- \mathbf{W}_i = (H_x^i, H_y^i, E_z^i) \text{ le projeté } L^2\text{-orthogonal de } \mathbf{W} \text{ sur } \mathcal{P}^{m_i}(\tau_i)^3$$

$$- (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{id_i}) \text{ une base } \mathcal{P}^{m_i}(\tau_i) : \mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{W}_{ij} \varphi_{ij}(\mathbf{x})$$

$$- \mathbf{W}_{ij} \in \mathbb{C}^3 \text{ sont les degrés de liberté sur } \tau_i \text{ et } d_i = \dim(\mathcal{P}^{m_i}(\tau_i))$$

- base nodale de Lagrange :

$$\varphi_{ij}(n_k) = \delta_{jk}$$



Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Discrétisation par une méthode GD

- formulation variationnelle :

$$\int_{\tau_i} \mathbf{i}\omega \mathbf{Q}\mathbf{W}\varphi d\mathbf{x} + \int_{\tau_i} (\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W})) \varphi d\mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tau_i} \mathbf{i}\omega \mathbf{Q}\mathbf{W}\varphi d\mathbf{x} - \int_{\tau_i} \nabla\varphi \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\tau_i} (\mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}) \varphi d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}\omega \mathbf{Q}_i \int_{\tau_i} \mathbf{W}_i \varphi d\mathbf{x} - \int_{\tau_i} \nabla\varphi \cdot \mathbf{F}(\mathbf{W})_i d\mathbf{x} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (\mathcal{F}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi d\sigma = 0$$

où :

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{W})_i \equiv \mathbf{F}(\mathbf{W})|_{\tau_i} \quad \text{et} \quad a_{ij} = \tau_i \cap \tau_j$$

- Flux numérique : flux centré

$$\mathcal{F}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W})_i + \mathbf{F}(\mathbf{W})_j}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij}$$

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Discretisation par une méthode GD

$$\begin{aligned} i\omega Q_i \int_{\tau_i} \mathbf{W}_i \varphi dx &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_i} ((\nabla \cdot F(\mathbf{W}_i)) \varphi - \nabla \varphi \cdot F(\mathbf{W}_i)) dx \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} (F(\mathbf{W}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi d\sigma = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2i\omega Q_i \int_{\tau_i} \mathbf{W}_i \varphi dx &+ \int_{\tau_i} \left(\left(\sum_{k=1}^2 A_k \partial_{x_k} \mathbf{W}_i \right) \varphi - \sum_{k=1}^2 (A_k \partial_{x_k} \varphi) \mathbf{W}_i \right) dx \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma = 0, \end{aligned}$$

- $F_k(\mathbf{W}) = A_k \mathbf{W}$, $M_{ij} = \sum_{k=1}^2 n_{ij}^{x_k} A_k$, $x_1 = x$, $x_2 = y$

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

traitement des conditions aux bords

- Traitement des conditions conditions aux bords :

- pour $a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i$: $M_{ij}\mathbf{W}_j = P_{im}\mathbf{W}_i$.
- pour $a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i$: $M_{ij}\mathbf{W}_j = P_{ia}\mathbf{W}_i + P_{i\infty}\mathbf{W}_i^{inc}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma &= \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma \\ &+ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma. \\ &= \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} \int_{a_{ij}} P_{im} \mathbf{W}_i \varphi d\sigma. \\ &+ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \int_{a_{ij}} P_{ia} \mathbf{W}_i \varphi d\sigma + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \int_{a_{ij}} P_{i\infty} \mathbf{W}_i^{inc} \varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Mise en forme matricielle

- $\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) \rightarrow \sum_{p=1}^{d_i} \mathbf{W}_{ip} \varphi_{ip}(\mathbf{x}), \varphi \rightarrow \varphi_{iq} :$

$$\begin{aligned} 2i\omega Q_i \int_{\tau_i} \mathbf{W}_i \varphi d\mathbf{x} &= 2i\omega Q_i \int_{\tau_i} \sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{W}_{ip} \varphi_{ip}(\mathbf{x}) \varphi_{iq}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= 2i\omega Q_i \sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{W}_{ip} \int_{\tau_i} \varphi_{ip} \varphi_{iq} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

- $\mathbb{W}_i = (\mathbf{W}_{i1}, \mathbf{W}_{i2}, \dots, \mathbf{W}_{id_i}), \Phi_i = (\phi_{pq})_{p=1, \dots, d_i}^{q=1, \dots, d_i} = \int_{\tau_i} \varphi_{ip} \varphi_{iq} d\mathbf{x} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2i\omega Q_i \sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{W}_{ip} \int_{\tau_i} \varphi_{ip} \varphi_{iq} d\mathbf{x} \\ \text{pour } q = 1, \dots, d_i \end{array} \right. \Rightarrow 2i\omega Q_i \mathbb{W}_i \Phi_i$$

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Mise en forme matricielle

$$\bullet \Phi_i^{x_k} = (\phi_{pq})_{p=1, \dots, d_i}^{q=1, \dots, d_i} = \int_{\tau_i} (\partial_{x_k}(\varphi_{ip})\varphi_{iq} - \partial_{x_k}(\varphi_{iq})\varphi_{ip}) dx$$

$$\bullet \Phi_{ij} = (\phi_{pq})_{p=1, \dots, d_i}^{q=1, \dots, d_j} = \int_{a_{ij}} \varphi_{ip}\varphi_{jq} d\sigma, \bullet \Phi_i = (\phi_{pq})_{p=1, \dots, d_i}^{q=1, \dots, d_i} = \int_{\tau_i} \varphi_{ip}\varphi_{iq} d\mathbf{x}$$

$$2i\omega Q_i \int_{\tau_i} \mathbf{W}_i \varphi_{iq} d\mathbf{x} + \int_{\tau_i} \left(\left(\sum_{k=1}^2 A_k \partial_{x_k} \mathbf{W}_i \right) \varphi_{iq} - \sum_{k=1}^2 (A_k \partial_{x_k} \varphi_{iq}) \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ij}} M_{ij} \mathbf{W}_j \varphi_{iq} d\sigma = 0,$$

⇓

$$\forall \tau_i \in \mathcal{T}_h : \quad 2i\omega Q_i \mathbb{W}_i \Phi_i + \sum_{k=1}^2 A_k \mathbb{W}_i {}^t\Phi_i^{x_k} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} M_{ij} \mathbb{W}_j {}^t\Phi_{ij} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} P_{im} \mathbb{W}_i \Phi_{ii} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} P_{ia} \mathbb{W}_i \Phi_{ii} = - \sum_{a_{ii} \in \mathcal{F}_i^i} P_{i\infty} \mathbb{W}_i^{inc} \Phi_{ii}.$$

Modèle et méthode de type Galerkin discontinu

Mise en forme matricielle

$$\begin{aligned}\forall \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}_h : \quad 2i\omega Q_i \mathbb{W}_i \Phi_i &+ \sum_{k=1}^2 A_k \mathbb{W}_i {}^t\Phi_i^{x_k} &+ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_d^i} M_{ij} \mathbb{W}_j {}^t\Phi_{ij} \\ &+ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} P_{im} \mathbb{W}_i \Phi_{ii} &+ \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} P_{ia} \mathbb{W}_i \Phi_{ii} \\ &= - \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} P_{i\infty} \mathbb{W}_i^{inc} \Phi_{ii}. \\ &\Downarrow\end{aligned}$$

• système linéaire : $\mathcal{A}\mathbf{X} = b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ii} = 2i\omega \Phi_i \otimes Q_i + \sum_{k=1}^2 \Phi_i^{x_k} \otimes A_k + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_m^i} \Phi_{ii} \otimes P_{im} + \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \Phi_{ii} \otimes P_{ia} \\ \mathcal{A}_{ij} = \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \Phi_{ii} \otimes M_{ij} \\ b_i = \sum_{a_{ij} \in \mathcal{F}_a^i} \Phi_{ii} \otimes P_{i\infty} \mathbf{W}_i^{inc}. \end{array} \right.$$

- exemples : pour 13684 triangles
 - En P1 $\rightarrow \mathcal{A} : 123156 \times 123156$ dont 1,353,148 termes non-nuls
 - En P2 $\rightarrow \mathcal{A} : 246312 \times 246312$ dont 4,104,024 termes non-nuls
 - En P3 $\rightarrow \mathcal{A} : 410520 \times 410520$ dont 11,162,224 termes non-nuls

$\Rightarrow \mathcal{A}$ matrice à coefficients complexes, creuse et non-hermitienne

- Résolution :
 - Méthodes directes basées sur une factorisation LU de \mathcal{A} :
 - robustes
 - coûteuse en temps CPU et en mémoire
 - difficilement parallélisable
 - Méthodes itératives :
 - moins coûteuse en temps CPU et en mémoire
 - ne convergent pas toujours
 - facilement parallélisables
 - Les méthodes de décomposition de domaine :
 - décomposition du problème global en sous-problèmes
 - se prêtent parfaitement au parallélisme
 - on peut utiliser une méthode directe sur chaque sous-domaine

- implémentation :
 - Langage Fortran 90/77.
 - Mailleur : SIMAIL.
 - Solveur système linéaire : MUMPS.

- trois cas tests :
 - Propagation d'une onde plane dans le vide.
 - Diffraction d'une onde plane par un cylindre PEC.
 - Diffraction d'une onde plane par un cylindre diélectrique.

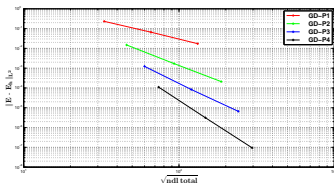
Résultats numériques.

Propagation d'une onde plane dans le vide

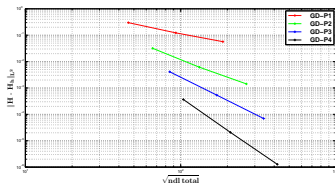
- Données :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ \epsilon_r = \mu_r = 1 \text{ (le vide)} \\ \mathbf{k} = (k_x, 0), \quad \mathbf{x} = (x, y) \end{array} \right. \quad W^{inc} = \begin{pmatrix} H_x^{inc} \\ H_y^{inc} \\ E_z^{inc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_y}{\mu\omega} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ -\frac{k_x}{\mu\omega} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

- Ordres de convergence numériques de la méthode GD :



	P1	P2	P3	P4
E	1.9	3.0	3.8	5.1



	P1	P2	P3	P4
H	1.2	2.2	2.9	4.0

Résultats numériques.

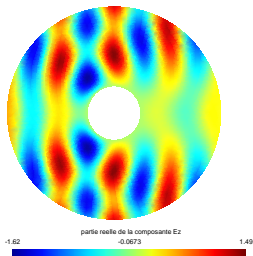
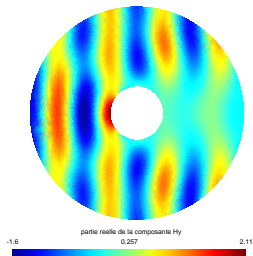
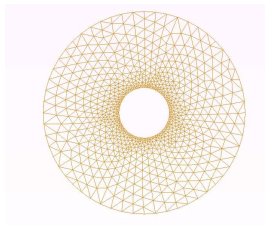
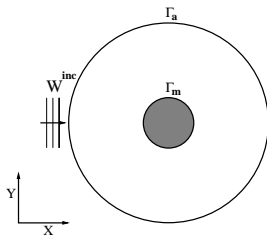
Propagation d'une onde plane dans le vide

	Taille matrice	Erreur L^2	Temps CPU(s)	Mémoire
P1 : 4214	37926×37926	0.123028	1.9	40
P2 : 4214	75852×75852	5.706E-03	8.5	142
P3 : 4214	126420×126420	5.734E-04	28.9	356
P4 : 4214	189630×189630	2.024E-05	99.0	734
P1 : 3255 P2 : 606 P3 : 353	50793×50793	5.358E-03	2.8	62
P1 : 1978 P2 : 1243 P3 : 1631 P4 : 362	105396×105396	5.338E-04	5.8	110
P3 : 3105 P4 : 1109	143055×143055	2.025E-05	32.2	410

TAB.: Comparaison du cas p -uniforme et du cas p -local.

Résultats numériques.

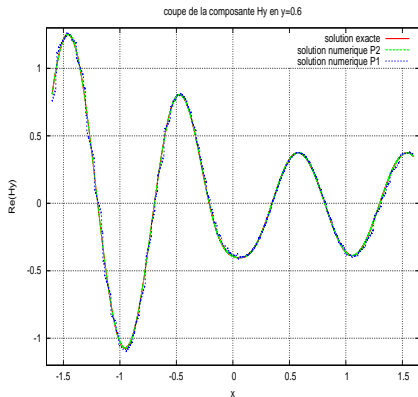
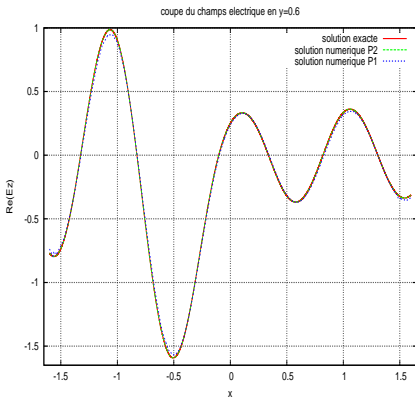
diffraction une onde plane par un cylindre PEC



Résultats numériques.

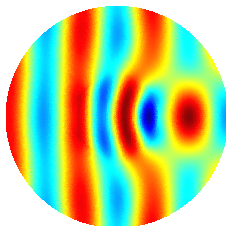
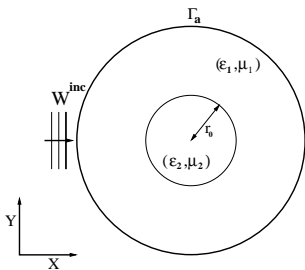
diffraction une onde plane par un cylindre PEC

	P1	P2	P3
Erreur L^2	3.47E-01	1.32E-02	2.51E-03

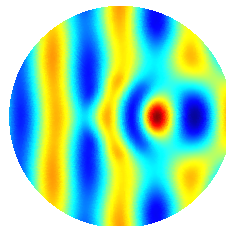
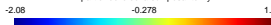


Résultats numériques.

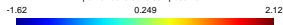
diffraction une onde plane par un cylindre dielectrique



partie réelle de la composante H_y



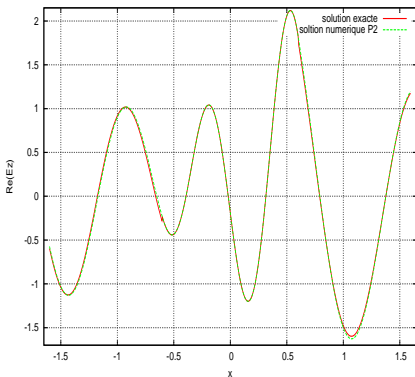
partie réelle de la composante E_z



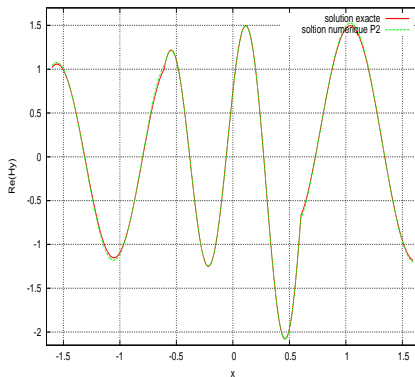
Résultats numériques

diffraction une onde plane par un cylindre diélectrique

coupe 1D de la composante E_z en $y=0.0$



coupe 1D de la composante H_y en $y=0.0$



Résultats numériques.

diffraction une onde plane par un cylindre dielectrique

	Erreur L^2	Temps CPU(s)	Mémoire (MB)
P4 : 7432	7.2496E-02	139	1248
P2 : 4786 P3 : 225 P4 : 2421	7.2496E-02	29	502

TAB.: Comparaison du cas p -uniforme et du cas p -local.

Conclusion et perspectives

- Code 2D qui donne de bons résultats pour des petits problèmes
- Mais inutilisable pour des gros problèmes (mémoire, temps de calcul)
- Perspectives à court terme :
 - parallélisation du code 2D
 - étude théorique de méthodes de décomposition de domaine
 - implémenter ces méthodes et les inclure dans le code parallèle
 - adaptation de la méthodologie numérique au contexte applicatif du projet
- Perspectives à long terme :
 - passage au 3D
 - Lien avec le système d'inversion mis au point pour l'imagerie micro-onde